Áreas: das noções intuitivas ao Teorema de Pick

Ms. Tania Marli Rocha[1]
Dr. Doherty Andrade[2]

Resumo

Este artigo procura reunir as diferentes idéias presentes na construção e evolução do conceito de área, apresentando os aspectos históricos de seu desenvolvimento, a dedução das fórmulas usuais para as áreas dos polígonos mais simples, a partir da composição e decomposição de figuras, a demonstração da área do círculo a partir do *método da exaustão* e o cálculo da área de figuras irregulares, através da *Fórmula de Pick.* Apresenta ainda uma demonstração da *Fórmula de Pick* e sua relação com o *Teorema de Euler* para regiões poligonais. O intuito do trabalho é contribuir para o aprofundamento do conhecimento matemático de professores e alunos, despertando seu interesse e curiosidade para explorar este e outros capítulos da Matemática, valorizando os aspectos históricos, empíricos e formais presentes na evolução desses conhecimentos.

Introdução

Na Educação Básica o conceito de área está presente em diferentes momentos, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Os currículos propõem diferentes abordagens a partir da exploração do espaço, associadas ou não ao trabalho com medidas e geometria.

Nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, os professores de Matemática desenvolvem esse conteúdo com o apoio do livro didático e introduzem o conceito de área como um número associado a uma superfície e, rapidamente, passam ao cálculo de área, utilizando fórmulas.

Em geral o trabalho prescinde de atividades que envolvam composição e decomposição de figuras propostas nos estudos de geometria e que subsidiam a compreensão das fórmulas. Pouca ou nenhuma ênfase é dada ao desenvolvimento histórico do conceito de área e à sua importância no desenvolvimento das sociedades na antiguidade. Além disso, os

[1] Professora da Rede Estadual de Ensino do Paraná, participante do PDE 2007. (taniamarli@seed.pr.gov.br)

[2] Professor do Departamento de Matemática da UEM – Universidade Estadual de Maringá (doherty@uem.br)

cálculos de área ficam restritos às figuras poligonais, à exceção do círculo, não contemplando a área de figuras cujos contornos são curvas ou irregulares, nem sempre presentes nos livros didáticos.

Desse modo, buscamos reunir neste texto as diferentes idéias presentes na construção e evolução do conceito de área, apresentando os aspectos históricos que o relaciona à necessidade de sobrevivência do homem primitivo, ao desenvolvimento da agricultura e da engenharia das primeiras civilizações, e às formas de construção do pensamento matemático na Grécia antiga.

Também são deduzidas as fórmulas usuais para as áreas dos polígonos mais simples, a partir da definição de área do quadrado e da utilização da unidade quadrada como padrão de medida. A área do círculo é demonstrada a partir do *método da exaustão* ou *Princípio de Eudoxo-Arquimedes*.

Para o cálculo da área de figuras irregulares, recorremos à *Fórmula de Pick*, mostrando uma aplicação em imagens de satélite de regiões devastadas por queimadas. Apresentamos ainda uma demonstração da *Fórmula de Pick* e sua relação com o *Teorema de Euler* para regiões poligonais.

Assim, pretende-se que este material contribua para o aprofundamento do conhecimento matemático de professores e alunos, despertando seu interesse e curiosidade para explorar este e outros capítulos da Matemática, valorizando os aspectos históricos, empíricos e formais presentes na evolução desses conhecimentos.

Aspectos históricos

Ao buscar a origem do conceito de área nos indagamos se esse conceito teria sido "construído" pelo homem ou se, assim como o senso numérico, é um conceito inerente ao ser humano, antes mesmo que ele pudesse ter consciência disso.

Antes do desenvolvimento da agricultura e do desenvolvimento de uma sociedade organizada, os grupos humanos tinham uma forma de sociedade calcada no caçar / colher e, conseqüentemente, um comportamento nômade necessário à sobrevivência da espécie (EVES, 1995). Mesmo assim, acreditamos que era preciso ter alguma capacidade para estimar a extensão de seus territórios, bem como a quantidade de alimentos disponíveis, a fim de decidir quando era necessário um novo deslocamento em busca de regiões com mais fartura e melhores condições de sobrevivência. É provável que esses grupos tivessem alguma noção de *extensão territorial*, o que mais adiante levaria ao desejo de domínio e posse da terra.

Os principais registros históricos existentes apresentam o conceito de área associado às atividades de mensuração feitas pelas civilizações antigas da Mesopotâmia e do Egito. De acordo com esses registros, a cerca de cinco ou seis mil anos já existiam sociedades avançadas ao longo dos grandes rios como o Nilo no Egito, o Tigre e o Eufrates no Oriente Médio, o Indo e o Ganges na região centro-sul da Ásia e o rio Amarelo na China. Essas sociedades são conhecidas por suas técnicas agrícolas e também por suas habilidades em engenharia para a drenagem e irrigação das terras e para estruturação das cidades que iam se constituindo.

Essas civilizações foram responsáveis pelo desenvolvimento de muitas tecnologias e conseqüentemente de conhecimentos matemáticos, tais como o cálculo de um calendário adequado e a elaboração de um sistema de pesos e medidas para ser utilizado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos. Também foi necessária a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e também para dividir a terra.

À medida que as comunidades se transformavam em cidades, desenvolvem-se as atividades de arquitetura e construção, principalmente de grandes templos e monumentos. Segundo HOGBEN (1958, p. 62), *os homens construíram mansões para os visitantes celestes e seus representantes na terra, antes de terem a perspicácia de pensarem em edificar, para si, residências mais decentes.* É nesse contexto que a prática da agrimensura se intensifica, conforme explica o autor:

> A exploração dos agricultores pela casta dirigente que ordenava a construção de todos aqueles templos e túmulos colossais, culminou com um sistema de taxação de toda a terra do Egito. Informa Heródoto que o Nilo, com suas inundações freqüentes, destruía e apagava periodicamente os marcos limítrofes das propriedades, motivando, deste modo, contínuas disputas sobre impostos e direitos de propriedade. Essas disputas deram origem a uma classe profissional de agrimensores. (pp. 66 e 67)

Voltando aos registros históricos, alguns dos principais documentos que atestam os conhecimentos geométricos das antigas civilizações são os papiros de Moscou (ou Golenishev) e Rhind (ou Ahmes), datados de 1850 e 1650 a.C., respectivamente.

Análises desses papiros constataram que os egípcios tinham vários conhecimentos geométricos e resolviam problemas relacionados à geometria. De acordo com EVES (1995, p. 75), vinte e seis dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos.

Segundo BOYER (1974, p. 13), o papiro Ahmes contém alguns problemas geométricos, como o problema 51, que mostra o cálculo da área de um triângulo isóceles através da multiplicação da metade da medida da base pela medida da altura, e o problema 52 que trata da área do trapézio isóceles de modo semelhante.

Há também indícios de que egípcios e babilônios dispunham de métodos eficientes para o cálculo da área do círculo e conheciam regras gerais para calcular a área de triângulos, retângulos e trapézios, e as utilizavam para calcular, de forma aproximada, as medidas dos terrenos cultivados, mesmo quando tinham a forma de figuras mais complexas. Em geral a unidade de medida utilizada era um quadrado, mas em algumas situações a estratégia utilizada era decompor a superfície em triângulos ou retângulos e calcular sua área como a soma das áreas das regiões resultantes desta decomposição.

Não se sabe ao certo porque o quadrado foi escolhido para unidade de área. Dentre as muitas versões apresentadas, uma delas é que a escolha foi inspirada pela maneira de se tecer uma cesta, arte que precedeu a fiação. Outra, que foi resultado do uso de ladrilhos de mosaicos hindus e chineses ou sugeridas pelos padrões quadriculados que decoravam a cerâmica produzida pelos babilônios.

Na Grécia antiga, por volta do ano 300 a.C., o geômetra grego Euclides produzia sua obra prima intitulada *Os Elementos*, que reuniu de modo sistematizado os principais conhecimentos de seus precursores. A maior parte do conteúdo da obra se refere à geometria, entretanto também contempla teoria dos números e álgebra elementar ou geométrica. A obra de Euclides tem grande influência na forma como tratamos a geometria nos currículos escolares da educação básica.

Segundo LIMA (1991), nos Elementos de Euclides não se medem segmentos de reta, pois qualquer unidade que se adote haverá sempre segmentos incomensuráveis e, naquela época, os números irracionais eram desconhecidos. A comparação entre dois segmentos se fazia através da razão entre eles, mas essas razões não eram consideradas números. Do mesmo modo não havia medidas de área. Segundo o autor, Euclides não definiu área, apenas considerou que duas figuras planas que tem a mesma área são iguais, e essa igualdade era verificada através da superposição.

Na obra de Euclides a idéia de área está associada ao conceito de igualdade entre figuras (equivalência). Isto pode ser observado quando enuncia que triângulos com bases iguais, situados entre as mesmas paralelas são figuras iguais (equivalentes), e que paralelogramos com bases iguais situadas entre as mesmas paralelas também são figuras iguais. Ou seja, duas figuras são equivalentes quando tem a mesma grandeza (ou mesma área).

Segundo HOGBEN (1958), uma das principais estratégias utilizadas por Euclides em suas demonstrações era a decomposição das figuras consideradas em triângulos e por isso ele deu especial atenção às suas propriedades e às formas de se obter sua área. Euclides demonstrou ainda que qualquer figura limitada por lados retos pode ser dividida em triângulos. Esse recurso foi amplamente utilizado na demonstração das áreas de figuras planas.

Entre os chineses, o cálculo de área aparece em diversos problemas contidos na obra "Nove Capítulos sobre a Arte Matemática", do Séc. I d.C. O conteúdo dessa obra contempla problemas de mensuração, engenharia, impostos, cálculo, soluções de equações e geometria, e trata também de áreas de figuras planas a partir da manipulação de peças como um quebra-cabeça da mesma natureza do Tangran[3].

Os gregos transformaram os conhecimentos empíricos dos egípcios e babilônios antigos em um conhecimento sistemático, baseado na argumentação e na demonstração e os conhecimentos matemáticos produzidos em seguida sempre estiveram impregnados desse modo de fazer matemática.

Áreas de Figuras Planas

Nos currículos escolares brasileiros prevalece o conceito de área como grandeza, e é a partir desse conceito que desenvolvemos este trabalho. Nesta concepção, assumimos o conceito de área como o saber matemático que permite comparar e medir uma superfície. Quando falamos em superfície, nos referimos a uma porção do plano limitada por uma figura

[3] O **Tangram** é um quebra-cabeça chinês antigo. O nome significa "7 tábuas da sabedoria". Ele é composto de sete peças (um quadrado, cinco triângulos e um paralaelogramo) que podem ser posicionadas de maneira a formar um quadrado.

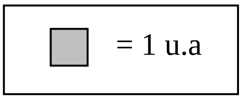
plana. Medir uma superfície significa obter um número que represente a porção do plano ocupada por essa região. Essa medida é chamada de *Área*.

Assim, para medir a superfície de uma região é necessário utilizar uma outra *superfície* como unidade de medida e verificar quantas vezes essa unidade cabe dentro da região a ser medida. Em geral, toma-se um quadrado como unidade de medida e o número de vezes obtido é a *Área* da região medida. Outro recurso utilizado é a decomposição de uma figura em outras cujas áreas sejam conhecidas.

Essas estratégias têm suas origens nos antigos modos de medir, mas podem ser escritas em linguagem formal, como em LIMA (1991, p. 21), através das seguintes propriedades:

> *Seja P um polígono do plano. A cada polígono P se pode associar um número real não negativo, chamado área de P, com as seguintes propriedades:*
>
> *1) Polígonos congruentes têm áreas iguais.*
>
> *2) Se P é um quadrado com lado unitário, então a área de P = 1.*
>
> *3) Se P pode ser decomposto em n polígonos P_1, ..., P_n, tais que dois quaisquer deles têm em comum no máximo alguns lados, então a área de P é a soma das áreas dos P_i.*

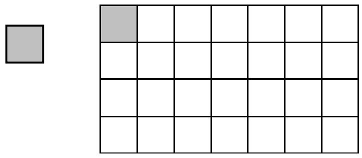
A partir dessas idéias apresentaremos modos de representar as áreas de algumas figuras planas. Para tanto assumiremos como unidade de medida um quadrado cujo lado mede uma *unidade de comprimento (u.c)*, que será chamado *quadrado unitário*. Em decorrência, a área do quadrado unitário será igual a uma *unidade de área (u.a.)*.



Área do Retângulo

Em toda a discussão que se segue estamos supondo que as medidas são múltiplos inteiros da unidade de comprimento (*uc*) adotada. As fórmulas obtidas podem ser generalizadas para medidas reais por meio de um argumento de densidade dos números racionais.

O retângulo é o quadrilátero que possui quatro ângulos retos e lados opostos paralelos. Para obter a área de um retângulo *R* cujos lados têm como medida *a* e *b* unidades de comprimento, tomamos a unidade de área, sobrepondo-a de modo a cobrir toda a superfície do retângulo.



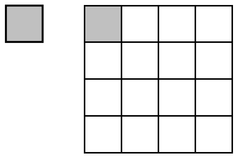
Verifica-se então que são necessários ($a.b$) quadrados unitários, cada um deles com área 1, para cobrir a superfície de R. Assim, podemos expressar a área do retângulo R da seguinte forma:

$$\acute{A}rea\ de\ R = a.b\ .$$

Área do Quadrado

O quadrado pode ser compreendido como *um retângulo que possui todos os lados iguais*, e sua área pode ser obtida de modo análogo à do retângulo.

Um quadrado Q cujo lado tem como medida a unidades de comprimento, pode ser recoberto por $a.a$ ou a^2 quadrados unitários, cada um deles com área 1.



Assim, podemos expressar a área do quadrado Q cujo lado mede a da seguinte forma:

$$\acute{A}rea\ de\ Q = a^2\ .$$

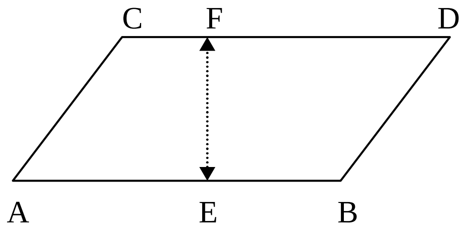
Área do Paralelogramo

O paralelogramo é o quadrilátero tem lados opostos paralelos, assim como o retângulo. Entretanto, ao tentarmos sobrepor quadrados unitários para obter sua área, nos deparamos com algumas limitações, pois os seus ângulos internos não são retos.

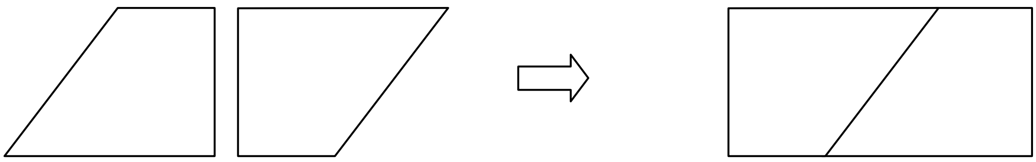
Para definir a área do paralelogramo recorremos à decomposição, de modo a compará-la com outra já conhecida, no caso o retângulo.

Em um paralelogramo, quando se toma um de seus lados como base, chama-se *altura* do paralelogramo à distância entre a base e o seu lado oposto.

No paralelogramo ABCD, tomando-se AB como base de medida *a*, o segmento EF, de medida *b* representa a sua altura.



Para obter a área do paralelogramo efetuamos um corte ao longo de sua altura EF, e em seguida recompomos as partes de modo a formar um retângulo.

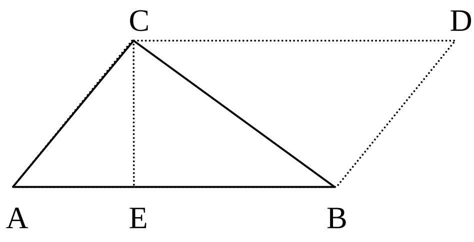


O retângulo formado tem as dimensões *a* e *b*, e sua área é dada por *a.b.*

Desse modo, podemos afirmar que a área do paralelogramo corresponde ao produto do comprimento de uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

Área do Triângulo

A área do triângulo pode ser obtida diretamente a partir da área do paralelogramo, visto que todo triângulo é metade de um paralelogramo que tem uma base e altura correspondente cujas medidas são iguais as da base e da altura correspondente do triângulo.



No triângulo ABC e no paralelogramo ABCD, a base AB tem medida *b* e a altura correspondente CE tem medida *a*.

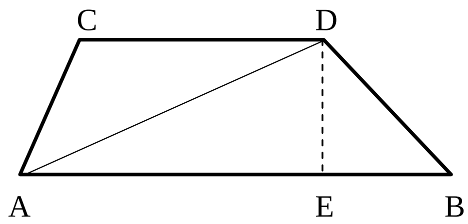
A área de ABCD = *b.a* e os triângulos ABC e BCD são congruentes, portanto a área do triângulo ABC é a metade da área de ABCD. Ou ainda, a área de um triângulo é a metade do produto da medida de uma base pela medida da altura correspondente.

$$Área\ de\ ABC = \frac{1}{2}(a.b)\,.$$

Área de um polígono qualquer

Conhecidas essas áreas, podemos utilizá-las para obter a área de um polígono qualquer, subdividindo-o em figuras cuja área já sabemos como obter. A área do polígono que se quer encontrar será a soma das áreas das figuras em que este foi subdividido.

Tomemos como exemplos o trapézio e o losango:

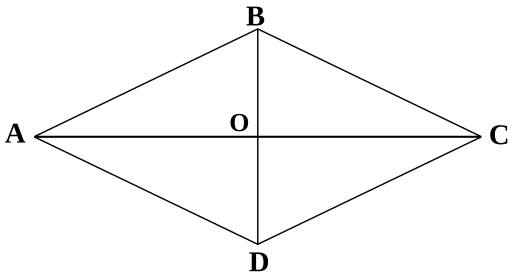


Consideremos as bases AB = b_1 e CD = b_2 e a altura do trapézio DE = *a*.

O segmento de reta AD divide o trapézio nos triângulos ABD e ACD, com bases b_1 e b_2 respectivamente, e mesma altura *a*. A área do trapézio é a soma das áreas dos dois triângulos:

$$área\ \ de\ ABCD = \frac{ab_1}{2} + \frac{ab_2}{2}$$
$$área\ de\ ABCD = \frac{a(b_1 + b_2)}{2}.$$

No losango ABCD, consideremos as diagonais AC = d_1 e BD = d_2. Observe que a diagonal AC subdivide o losango em dois triângulos congruentes, ABC e ACD com base comum AC = d_1 e alturas BO e DO iguais a $\frac{d_2}{2}$.



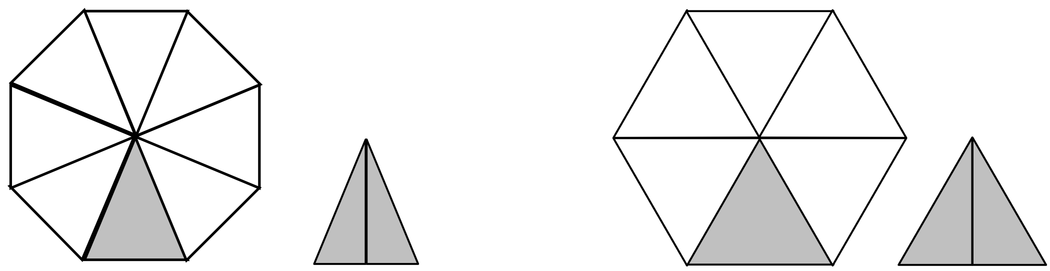
Desse modo, a área do losango será dada por:

$$\text{área de } ABCD = 2.\left(\frac{d_1.\frac{d_2}{2}}{2}\right)$$

$$\text{área de } ABCD = \frac{d_1.d_2}{2}.$$

Área de Polígonos Regulares

Um polígono é chamado regular se todos os seus lados e todos os seus ângulos internos são congruentes. Para se obter a área de uma superfície limitada por um polígono regular, é preciso considerar que todo polígono regular de lado *l* pode ser dividido em *n* triângulos iguais, sendo *n* o número de lados do polígono. Cada triângulo tem como base o lado *l* do polígono e altura igual a apótema *a* do polígono. (*O apótema de um polígono regular é o segmento de reta que une o centro desse polígono ao ponto médio de qualquer um de seus lados).*

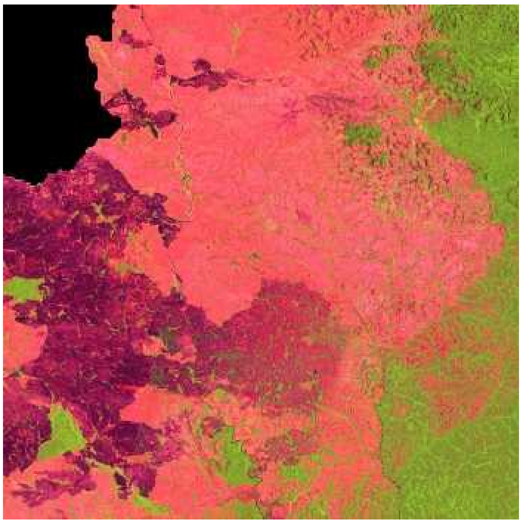


Desse modo, a área do polígono regular pode ser obtida multiplicando-se a área de cada triângulo pelo número de lados *n* do polígono, o que nos leva ao seguinte resultado:

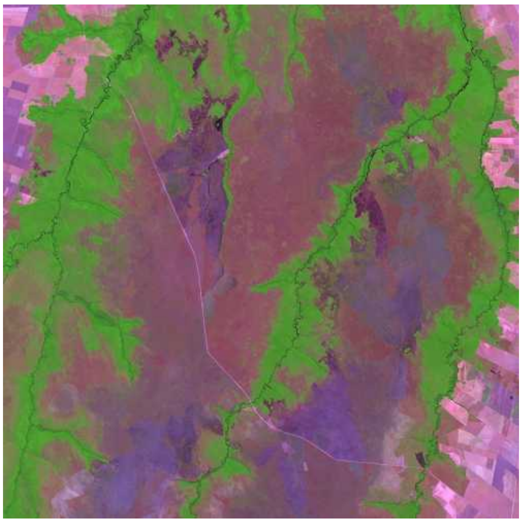
$$\acute{A}rea\ do\ Pol\acute{\imath}gono = n \cdot \left(\frac{l.a}{2}\right).$$

Área de superfícies não-poligonais

É importante reconhecer que em muitas situações pode ser necessário medir regiões que não são limitadas por polígonos, como por exemplo, a área do círculo, da elipse e de figuras como as que aparecem nas imagens a seguir, que mostram regiões afetadas por queimadas (áreas que aparecem em preto ou em tonalidades muito escuras). Para conhecer o tamanho da devastação é preciso obter a área de regiões completamente irregulares.



Tocantins
Fonte: http://www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br

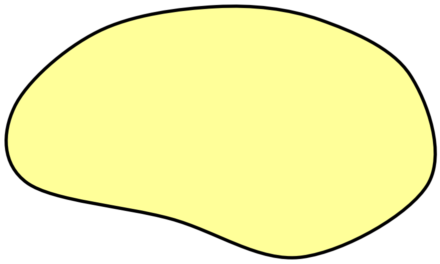


Chapada dos Parecis - Mato Grosso Fonte:
http://www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br

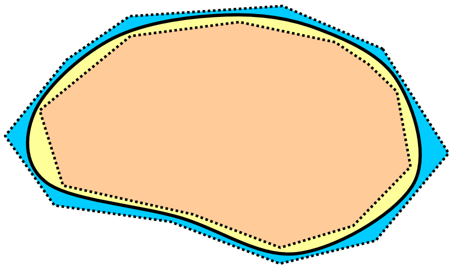
Na Grécia antiga, Arquimedes apresentou uma demonstração da área do círculo a partir do *método da exaustão*, também conhecido por *Princípio de Eudoxo-Arquimedes*, pois tem como base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) e Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) foi o matemático que mais explorou esse método na antiguidade (PINTO, 2004).

No cálculo de áreas, pode-se dizer que o *método da exaustão* consiste em buscar aproximações sucessivas da área a ser medida, por falta e por excesso, a partir de outras já conhecidas.

Chamaremos de S a área da figura a seguir, cuja área se deseja obter.



Chamaremos de A a área do polígono interno a S e de B a área do polígono externo a S.



Podemos dizer que a área A é a aproximação por falta e B é a aproximação por excesso da área S . Ou seja:

$$A \leq S \leq B.$$

O método da exaustão e a área do círculo

Antes de apresentar uma demonstração da área do círculo através do método da exaustão, é importante observar que esse princípio se apóia na proposição I do Livro X dos Elementos de Euclides:

> *Dadas duas grandezas de mesma espécie, se retiramos da maior uma parte maior que sua metade e do resto retirarmos uma parte maior que sua metade e assim por diante, obteremos após um número finito de etapas uma grandeza menor que as duas grandezas consideradas.*

Por esta proposição, Euclides afirma que se tomarmos AB e C duas grandezas desiguais em que AB é a maior, se de AB for subtraída uma grandeza maior do que a sua metade, e do que ficou subtrairmos uma grandeza maior do que a sua metade e se repetirmos o processo continuamente, restará uma grandeza que é menor do que a grandeza C.

Vejamos uma demonstração dessa proposição.

Designando a grandeza AB por α e a grandeza C por β, temos duas grandezas α *e* β, grandezas desiguais e do mesmo tipo, em que α é a maior. Pode-se afirmar que existe um múltiplo de β que excede α, isto é existe um número natural n tal que $n\beta > \alpha$.

Retirando de α uma grandeza maior do que sua metade sobra uma grandeza α_1 tal que $n\beta - \beta > \alpha_1$ (de $n\beta$ retirou-se β e repare-se que $\beta < \frac{(n\beta)}{2}$).

E retirando de α_1 uma grandeza maior do que a sua metade sobra uma grandeza α_2 tal que $(n\beta - \beta) - \beta > \alpha_2$ (de $n\beta - \beta$ retirou-se β e repare-se que $\beta < \frac{(n\beta - \beta)}{2}$).

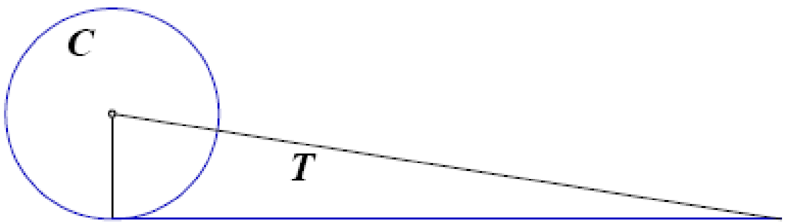
Repetindo este processo, ao fim de *n-2* passos obtemos uma grandeza α_{n-2} tal que $2\beta > \alpha_{n-2}$.

Retirando de α_{n-2} uma grandeza maior do que a sua metade sobra uma grandeza α_{n-1} tal que $\beta > \alpha_{n-1}$, (de 2β retirou-se β que é exatamente a sua metade).

Portanto ao fim de *n-1* passos, obtém-se uma grandeza α_{n-1} tal que $\alpha_{n-1} < \beta$, isto quer dizer que se obteve uma grandeza menor do que a menor das grandezas inicialmente dadas.

O método da exaustão não é um método de descoberta, mas sim de prova e demonstração. Antes de aplicá-lo é preciso conhecer o resultado que se quer provar. No caso da área do círculo, Arquimedes já considerava a seguinte equivalência:

> *Um círculo equivale (em área) a um triângulo retângulo que tem altura igual ao seu raio e a base igual ao comprimento da sua circunferência.*



Em notação atual, essa equivalência pode ser escrita como a seguir:

$$Área\,do\,círculo = \frac{2\pi r \cdot r}{2} \text{ ou } Área\,do\,círculo = \pi r^2$$

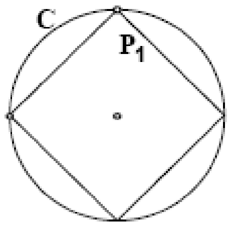
O método da exaustão pode ser aplicado para demonstrar essa igualdade. Para tanto, consideraremos C a área do círculo e T a área do triângulo, e desse modo, temos três possibilidades de comparação entre essas áreas: $\boldsymbol{C > T}$**;** $\boldsymbol{C < T}$ ou $\boldsymbol{C = T}$.

Tomaremos aproximações da área do círculo, por falta e por excesso, através da área de polígonos regulares inscritos e circunscritos, e mostraremos que as duas primeiras possibilidades são absurdas, concluindo então que $C = T$.

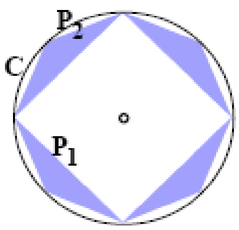
I. Vamos supor que $C > T$

Temos assim duas grandezas de mesma natureza (áreas), C e $C - T$, às quais aplicaremos o método da exaustão.

Vamos retirar da maior que é C, um quadrado inscrito cuja área é P_1, que é maior que a metade da área C. A área restante será $C - P_1$.



Repetindo o processo, da área restante $C - P_1$ vamos retirar quatro triângulos isóceles, que correspondem a uma parte maior que sua metade.



Observe que a área dos triângulos somada à área do quadrado P_1 retirado anteriormente, corresponde à área de um octógono regular, cuja área chamaremos de P_2. A área restante será então $C - P_2$.

Repetindo este processo um número finito de vezes, obteremos um polígono regular de área P_n inscrito no círculo, , tal que a área restante $C - P_n$ é menor que as duas áreas C e $C - T$

consideradas inicialmente. Assim $C - P_n < C - T$, donde se conclui que $\boldsymbol{T < P_n}$.

Por outro lado, considerando que P_n é um polígono regular inscrito no círculo C, pode-se afirmar que o apótema a de P_n é menor que o raio r do círculo C e que o perímetro P do polígono regular P_n é menor que o comprimento C da circunferência. Sendo assim $\frac{a \cdot P}{2} < \frac{r \cdot C}{2}$.

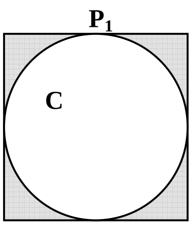
Ocorre que $\frac{a \cdot P}{2}$ corresponde à área do polígono regular P_n e $\frac{r \cdot C}{2}$ corresponde à área do triângulo T, o que nos leva a $\boldsymbol{P_n < T}$.

Isso que mostra que a conclusão a que chegamos anteriormente, $\boldsymbol{T < P_n}$ é absurda e nesse caso, também é absurda a afirmativa inicial $\boldsymbol{C > T}$.

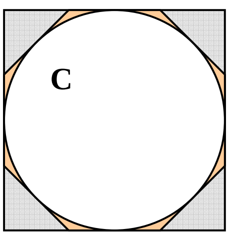
II. Vamos supor que $\boldsymbol{C < T}$

Consideremos agora P_1 a área do quadrado circunscrito ao círculo C. Aplicaremos o método da exaustão às grandezas $T – C$, que é a menor delas, e P_1, um quadrado circunscrito ao círculo C.

Do quadrado P_1 subtraímos a área do círculo C, que é maior que metade da área do quadrado. A área restante será $P_1 – C$.



Repetindo o processo, da área restante $P_1 – C$, retiramos quatro triângulos isóceles, que é maior que a sua metade.



Observe que a área que resta corresponde à diferença entre a área do octógono regular circunscrito e a área de C. Chamando de P_2 a área do octógono, a área restante pode ser representada por $P_2 – C$.

Repetindo este processo um número finito de vezes, obteremos um polígono regular de área P_n circunscrito ao círculo C, tal que a área restante $P_n – C$ é menor que as duas áreas consideradas inicialmente. Assim podemos afirmar que $P_n – C < T - C$, donde se conclui que $\boldsymbol{P_n < T}$.

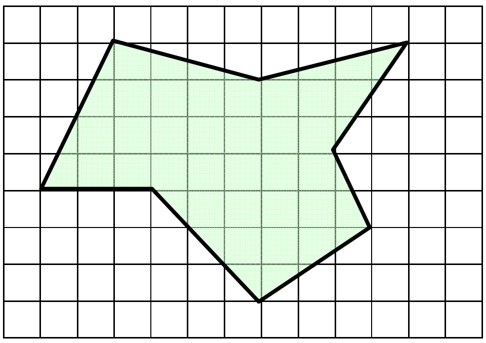
Por outro lado, considerando que P_n é um polígono regular circunscrito ao círculo C, pode-se afirmar que o apótema a de P_n é maior que o raio r do círculo C e que o perímetro P do polígono regular P_n é maior que o comprimento C da circunferência. Sendo assim $\frac{a \cdot P}{2} > \frac{r \cdot C}{2}$.

Ocorre que $\frac{a \cdot P}{2}$ corresponde à área do polígono regular circunscrito P_n e $\frac{r \cdot C}{2}$ corresponde à área do triângulo T, o que nos leva a $\boldsymbol{P_n > T}$. Isso mostra que a conclusão a que chegamos anteriormente, $\boldsymbol{P_n < T}$**,** é absurda e nesse caso, também é absurda a afirmativa inicial $\boldsymbol{C < T}$.

Retomando as três possibilidades apresentadas no início desta demonstração, $\boldsymbol{C > T}$; $\boldsymbol{C < T}$ e $\boldsymbol{C = T}$, em I e II ficou demonstrado que as duas primeiras são absurdas, e desse modo podemos concluir que $\boldsymbol{C = T}$**,** ou seja, $\text{Área do círculo} = \pi r^2$.

A fórmula de Pick

A Fórmula de Pick é um teorema que foi publicado em 1899 por George Alexander Pick, como um recurso interessante para o cálculo de área de polígonos simples com vértices sobre os pontos de intersecção das retas de uma malha quadriculada, como na figura a seguir:



Para compreender o teorema é preciso estabelecer alguns conceitos:

▪ cada ponto de interseção de retas da malha quadriculada será chamado de **nó**;

▪ cada pequeno quadrado será chamado de **célula** e possui uma unidade de área;

▪ um polígono é chamado simples quando seu contorno for uma curva fechada simples, ou seja, ele não possui "buracos" no seu interior nem intersecções de suas arestas.

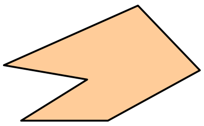


Figura 1

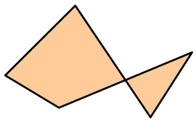


Figura 2

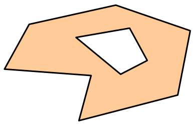


Figura 3

A figura 1 representa um polígono simples. Na figura 2 o polígono não é simples, pois tem um vértice que pertence a mais de dois lados e o polígono da figura 3 não é simples porque tem um buraco.

Sendo P um polígono simples, com vértices sobre os nós de uma malha, os pontos do reticulado sobre o contorno de *P* serão chamados pontos de fronteira e os pontos do reticulado que se encontram no interior de *P* serão chamados pontos interiores.

Teorema de Pick

O Teorema de Pick pode ser enunciado do seguinte modo:

*Seja **P** um polígono simples. Se B é o número de pontos de fronteira e I o número de pontos interiores, então a área de **P** é dada por* $A(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}B + I - 1$.

O número do lado direito da fórmula de Pick $A(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}B + I - 1$ é característico do polígono ***P*** e será chamado número de *Pick de **P*** e denotado por $\boxed{Pick(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}B + I - 1}$

Demonstração da Fórmula de Pick

Primeiro observemos que, se o número de Pick de um polígono simples é sua área, então ele deve ser aditivo, isto é, se ***P*** é um polígono simples obtido pela justaposição dos polígonos simples $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$ ao longo de pelo menos uma aresta, então,

$$Pick(\mathbf{P}) = Pick(\mathbf{P}_1) + Pick(\mathbf{P}_2).$$

Vamos demonstrar a propriedade acima.

Seja $Pick(\mathbf{P}_k) = \frac{1}{2}B_k + I_k - 1,\ k \in \{1, 2\}$ o número de pick de $\mathbf{P}_k$ e v o número de vértices da fronteira comum aos dois polígonos. Verifica-se que, exatamente dois destes pontos serão pontos de fronteira do polígono ***P*** e, os vértices restantes ($v - 2$) serão pontos interiores de ***P***[4].

Assim, o número I de pontos interiores de ***P*** será dado por $I = I_1 + I_2 + v - 2$ e o número B de pontos de fronteira de ***P***, será dado por $B = B_1 + B_2 - 2(v-2)$. Logo

$$
\begin{aligned}
Pick(P) &= \frac{1}{2}B + I - 1 \\
&= \frac{1}{2}[B_1 + B_2 - (2v - 2)] + (I_1 + I_2 + v - 2) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\ B_1 + \frac{1}{2}\ B_2 - v + 1 + I_1 + I_2 + v - 2 - 1 \\
&= (\frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1) + (\frac{1}{2}\ B_2 + I_2 - 1) \\
&= Pick(P_1) + Pick(P_2).
\end{aligned}
$$

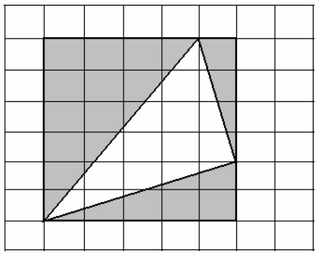
O que acabamos de mostrar é que, justapondo-se dois polígonos simples ao longo de pelo menos uma aresta, os respectivos números de Pick adicionam-se, assim como as respectivas áreas. Isto é particularmente importante nesta demonstração, uma vez que possibilita a decomposição de um polígono dado ***P*** em uma justaposição de polígonos mais simples, para os quais o teorema de Pick possa ser verificado mais facilmente.

Assim, vamos admitir que todo polígono pode ser *triangulado*, isto é, pode ser dividido em triângulos com vértices no reticulado. Devido à propriedade aditiva do número de Pick, bastará mostrar que o teorema vale para os triângulos.

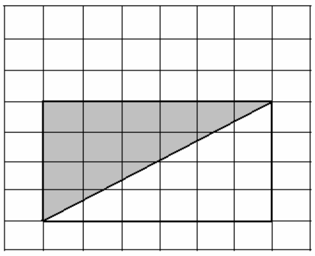
Todo triângulo pode ser completado de modo a compor um retângulo, justapondo a ele triângulos retângulos com catetos paralelos aos eixos coordenados.

---

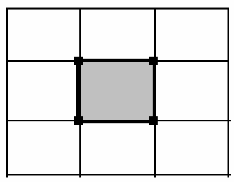
[4] Observe que isto poderia não ser válido se os polígonos não fossem simples.



Além disso, um triângulo retângulo com catetos paralelos aos eixos coordenados pode ser completado de modo a compor um retângulo de lados paralelos aos eixos, justapondo a ele outro triângulo retângulo com catetos paralelos aos eixos e de mesma área.



Assim, se o teorema é válido para retângulos de lados paralelos aos eixos então é válido para triângulos quaisquer. Um retângulo de lados paralelos aos eixos é a justaposição de “quadrados elementares” (veja figura), para os quais o Teorema de Pick pode ser verificado diretamente.

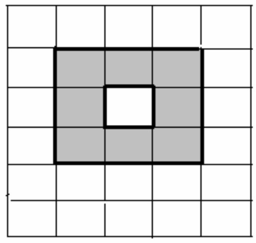


Para um quadrado elementar **Q** temos: $\begin{array}{l} A(Q)=1 \\ B=4 \\ I=0 \end{array}$.

Logo, $Pick(\mathbf{Q})=\frac{1}{2}4-1=1=A(\mathbf{Q})$.

Isto completa a demonstração do Teorema de Pick para os polígonos simples.

Mas o que acontece se aplicarmos essa mesma fórmula para polígonos que contenham “buracos”, como o da figura a seguir?

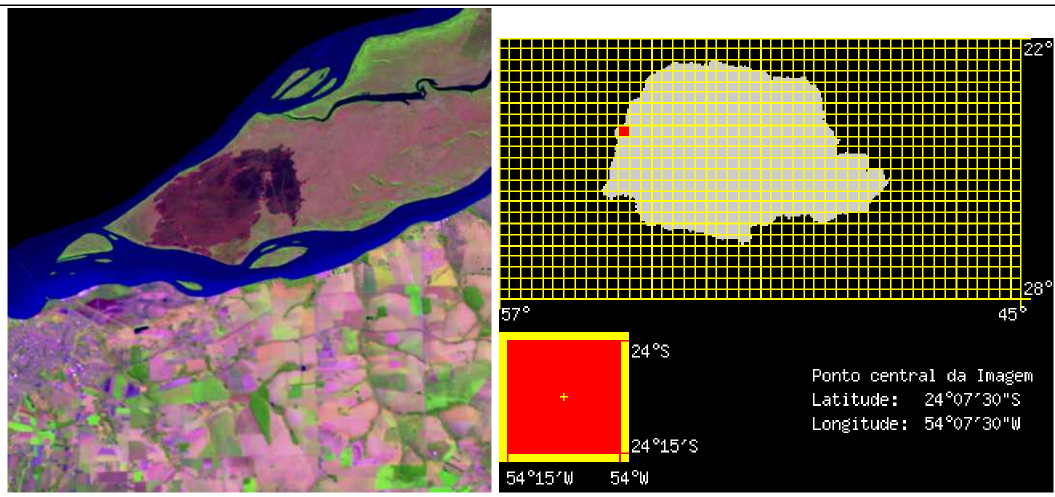


Nesse caso, o número de Pick é 17, mas a área do polígono é 8. Sendo assim, temos que admitir que o teorema de Pick, tal como o demonstramos, não vale se o polígono tiver buracos. Como veremos adiante, existe uma generalização desse teorema para “polígonos com buracos”.

A Fórmula de Pick e o cálculo da área de uma região irregular

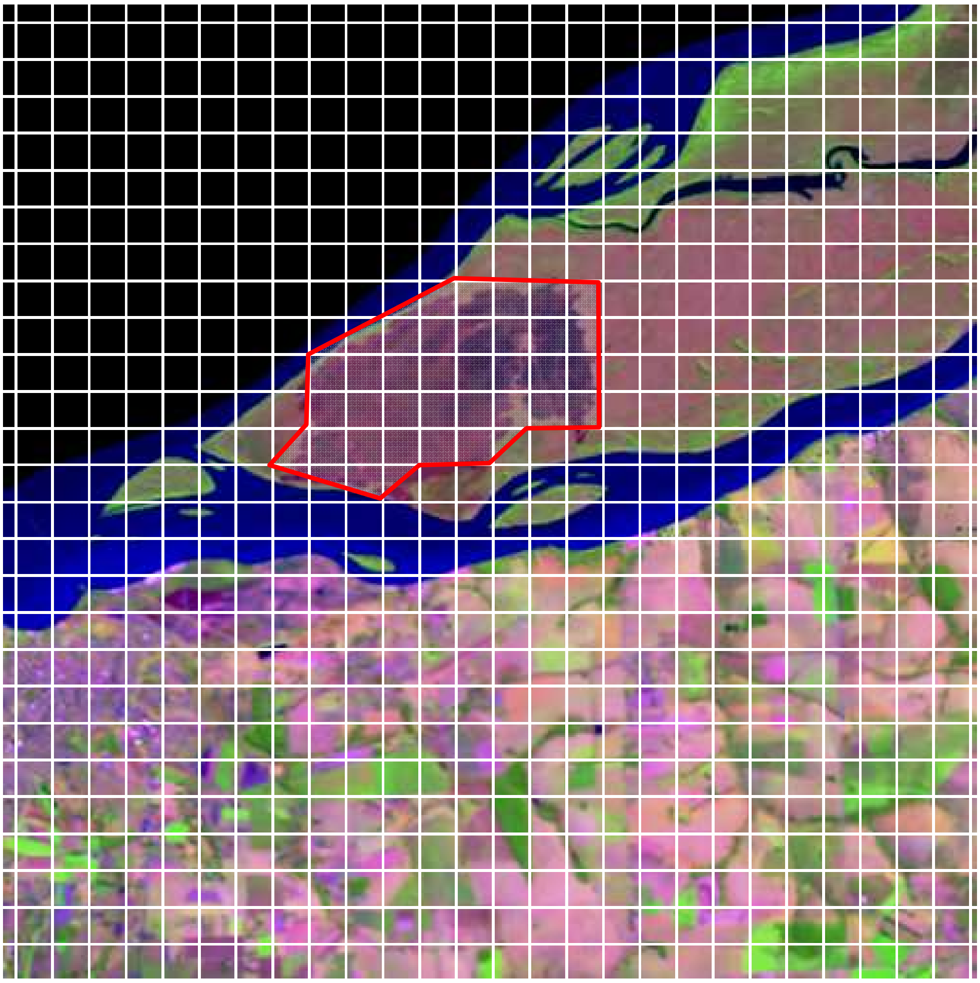
A imagem a seguir, obtida por satélite, mostra uma parte do município de Guaíra, situado na região noroeste do Paraná e a parte sul da Ilha Grande, que é uma ilha fluvial do Rio Paraná e faz parte do Parque Nacional de Ilha Grande, região de proteção ambiental.

Embora seja uma área de preservação, nesse parque os incêndios são muito freqüentes e alteram constantemente a paisagem. A imagem escura que se vê na ilha indica uma área devastada por sucessivas queimadas.



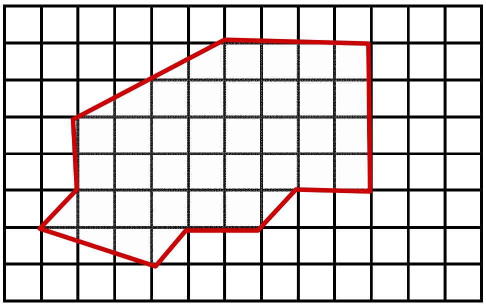
Guaira – PR
Fonte: http://www.cdbrasil.cnpm.embrapa.br

Através dessa imagem é possível obter uma boa aproximação da área da região devastada. Para isso será utilizada uma ampliação em escala de 1 : 25.000, sob uma malha quadriculada de 0,5 cm. Sobre esta malha, construímos um polígono *P* com os vértices sobre seus nós, cuja área se aproxima, por excesso, da área da região queimada.



Destacando agora a malha e o polígono, podemos aplicar a Fórmula de Pick e obter um valor bem próximo da área da região inicial. Retomando a Fórmula de Pick temos que:

$$A(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}B + I - 1.$$



No polígono P, tem-se B = 20 e I = 27, então $A(P)$ = 36.

Pela escala, tem-se que a área de cada célula da malha corresponde a 15.625 m^2 . Assim a área da região queimada pode ser estimada em 562.500 m^2.

Teorema de Pick e Característica de Euler

Teorema de Euler

Seja P uma figura plana poligonal simples ou não, com ou sem buracos. Tomando uma subdivisão de P constituída por um número finito de polígonos simples e sem buracos, aos quais chamaremos faces, de tal forma que a interseção de duas faces ou é vazia ou é um vértice comum ou é um conjunto de arestas comuns. Se F é o número de faces, A é o número de arestas, V o número de vértices e b é o número de buracos, então $F - A + V = 1 - b$.

A expressão $F - A + V$ é chamada *característica de Euler* de , indicada por $X(P)$.

Uma demonstração da fórmula de Euler

I - Primeiro suponha que o polígono P não tenha buracos, isto é, $b = 0$. Neste caso mostraremos que $F - A + V = 1$.

- Dado um polígono sem buracos com uma subdivisão qualquer, é possível subdividi-lo em triângulos, portanto basta mostrar que a fórmula de Euler vale para subdivisões em triângulos, que chamaremos de *triangulação*.
- Considere um polígono com uma triangulação e seja F o número de triângulos (faces).
- Se $F = 1$, então o polígono é um triângulo. Neste caso temos $A = 3$ e $V = 3$. Logo, $F - A + V = 1$.

- Se $F > 1$, é possível reduzir o polígono a um triângulo retirando triângulos de fronteira (que contém algum vértice da fronteira do polígono), um de cada vez. Vamos mostrar que, a cada triângulo retirado, a quantia $F - A + V$ permanece inalterada no polígono resultante. Assim a característica de Euler de um polígono sem buracos é a mesma de um triângulo, isto é, 1.
- Os triângulos de fronteira podem ser de dois tipos:

  Tipo 1: O triângulo tem exatamente 2 vértices na fronteira.

  Tipo 2: O triângulo tem 3 vértices na fronteira.
- Retirando um triângulo do *tipo 1* o polígono resultante terá uma face e uma aresta a menos e o número de vértices permanece o mesmo . Desse modo, temos:

$$(V-1)-(A-1)+(F-1)=V-A+F$$

- Um triângulo do *tipo 2* pode ter duas ou três arestas de fronteira. No primeiro caso, ao retirá-lo, teremos um polígono com uma face, duas arestas e um vértice a menos. Assim,

$$(V-1)-(A-2)+(F-1)=V-A+F$$

- No segundo caso, teremos uma face, três arestas e dois vértices a menos.

$$(V-1)-(A-3)+(F-2)=V-A+F$$

- Através de uma seqüência apropriada das operações anteriores, P reduz-se a um único triângulo, para o qual $F-A+V=1$.

II – Consideremos agora um polígono P com buracos, em que F é o número de faces, A é o número de arestas, V o número de vértices e b é o número de buracos.

- Consideremos agora a figura P', que se obtém a partir de P, preenchendo cada um dos buracos com uma nova face. A nova figura P' é uma figura poligonal simples para a qual é válida a fórmula de Euler. O seu número de faces é $F + b$, enquanto que o número de arestas e de vértices continua o mesmo A e V, respectivamente. Para esta nova figura, tem-se que $(F+b)-A+V=1$, ou ainda, $F-A+V=1-b$.

Relação entre a Fórmula de Pick e a Fórmula de Euler

Tomando como válidas as duas fórmulas para regiões poligonais simples, pode-se afirmar que *O Teorema de Pick implica a Fórmula de Euler*, conforme demonstramos a seguir:

- Um triângulo cujos vértices estão sobre os nós de uma malha quadriculada é dito primitivo se não existirem nós da malha sobre seus lados.
- Para um triângulo primitivo temos 3 pontos de fronteira (os vértices) e nenhum ponto interior. Portanto, o número de Pick é $\frac{1}{2}$.
- Considere um polígono simples e sem buracos com vértices sobre os nós da malha quadriculada. Ele pode ser triangulado de modo que todos os triângulos sejam primitivos. A partir dessa triangulação vamos relacionar a característica de Euler do polígono com seu número de Pick.
- Como os únicos nós da malha sobre o polígono são os vértices dos triângulos temos que

$$V = B + I \qquad (1)$$

- Cada aresta do interior pertence à exatamente dois triângulos (o polígono não tem buracos) e o número de arestas da fronteira é igual ao número de vértices da fronteira B (o polígono é simples). Assim, ao contarmos as arestas em cada triângulo teremos contado $3F$ arestas das quais cada aresta interior foi contada duas vezes e cada aresta de fronteira, uma vez. Portanto temos,

$$3F = 2(A - B) + B.$$

Ou de forma equivalente

$$A = \frac{1}{2}(3F + B). \qquad (2)$$

Vamos mostrar então que a fórmula de Pick implica a fórmula de Euler.

- Suponha que vale a fórmula de Pick. Então, a área de cada triângulo (primitivo) bem como do polígono é igual seu número de Pick. Como temos F triângulos, a área do polígono é $\frac{1}{2}F$. Assim $\frac{F}{2} = B + I - 1$.

Ou ainda: $F = B + 2I - 2$. (3)

Usando as fórmulas (1), (2) e (3) temos:

$$
\begin{aligned}
F - A + V &= F - \frac{1}{2}(3F + B) + B + I \\
&= \frac{B}{2} + I - \frac{1}{2}F \\
&= \frac{B}{2} + I - \frac{1}{2}(B + 2I - 2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar agora que se a fórmula de Pick vale para triângulos primitivos, então a fórmula de Euler implica a fórmula de Pick para qualquer polígono simples.

- Para isto, considere o polígono triangulado em triângulos primitivos. Então valem as relações (1) e (2).
- Se a fórmula de Pick vale para triângulos primitivos, então a área de cada triângulo é seu número de Pick que é $\frac{1}{2}$, por serem primitivos. Assim a área do polígono é $\frac{1}{2}F$.
- Suponha agora que a fórmula de Euler é verdadeira. Como o polígono não tem buracos, então

$$F - A + V = 1$$

- Das relações (1) e (2) obtemos

$$F - \frac{1}{2}(3F + B) + B + I = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}B + I - 1$$

Fórmula de Pick para polígonos não simples

O conhecimento matemático está sempre em evolução, e recentemente foi demonstrada uma generalização da Fórmula de Pick que se estende aos polígonos cujos contornos não são curvas fechadas simples. A expressão obtida pode ser considerada uma forma geral da Fórmula de Pick, enunciado como a seguir.

Teorema de Pick

Seja P uma reunião finita de regiões poligonais com vértices sobre os nós de uma malha. Se V denota o número total de nós da malha em P e, E_b é o número de lados do bordo de P (aqui consideramos que dois nós consecutivos do bordo formam um lado), então a área de P é dada por:

$$A(P) = V - \frac{E_b}{2} - \chi ,$$

onde $\chi = 1 - b$ *é a característica de Euler de P, sendo b é o número de buracos de P.*

Conclusão

Ensinar matemática exige, entre outras habilidades, um conhecimento profundo do conteúdo que se quer ensinar. Isso significa conhecer os aspectos históricos, empíricos e formais presentes na evolução desses conhecimentos, bem como seu desenvolvimento contemporâneo e as possíveis aplicações do tema em questão.

Mesmo cientes das limitações desse trabalho, ao abordar o conceito de *Área* nos propusemos apresentar um material que contemplasse esses diferentes aspectos, de modo que professores e alunos pudessem perceber o valor e a riqueza do tema.

Acreditamos que essa abordagem permite ampliar as possibilidades de exploração do conceito de *Área*, especialmente no Ensino Médio, trazendo para a sala de aula conhecimentos como *a Fórmula de Pick* e o *Teorema de Euler*.

Apesar desses conteúdos não estarem contemplados diretamente nos currículos escolares, acreditamos que eles podem se tornar acessíveis aos alunos do Ensino Médio, principalmente se forem apresentados juntamente com situações que viabilizem sua aplicação, podendo se constituir como uma experiência enriquecedora para o ensino e para a aprendizagem em Matemática.

Referências Bibliográficas

ANDRADE, DOHERTY. **Teorema de Pick**. Disponível em <http://www.dma.uem.br/kit/pick.html>. Acesso em 22 mar. 2008.

BOYER, CARL B. **História da Matemática.** Tradução: Elza F. Gomide. Edgard Blucher. São Paulo, 1974.

EVES, HOWARD. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Editora da UNICAMP. Campinas – SP, 1995.

HOGBEN, LANCELOT. **Maravilhas da Matemática.** 2ª. Edição. Globo. Porto Alegre, 1958.

LIMA, ELON LAGES. **Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança.** Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 1991.

PINTO, JOAQUIM ANTÓNIO P. **Método de Exaustão dos Antigos: *O Princípio de Eudoxo-Arquimedes.*** Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Disponível em http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/vitae/textos/04_Met_Exa_Hist_Analise_JPinto.pdf (Acesso em 02 abr. 2008)

VARBERG, D.E. **Pick's Theorem Revisited**. The Am Math Monthly v 92 (1985), pp 584-587.